Keine Ahnung von Trigonometrie

Teil 1

Wie geht

Trigonometrie

im rechtwinkligen Dreieck

???

Datei Nr. 16015

Stand 13.3.2020

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Viele meiner Texte sind so geschrieben, wie man auch im Unterricht vorgeht: Ein Thema wird mit Beispielen eingeführt, dann wird noch etwas gefolgert und bewiesen, und dann beginnt die Übungsphase.

Mit diesem Text wende ich mich an Personen (meistens werden es Schüler sein), die von Trigonometrie keine Ahnung (mehr) haben und rasch erfahren möchten, was man damit wie anfängt. Wer also „Keine Ahnung von Trigonometrie“ hat, ist hier richtig.

Ich erzähle wie man bestimmte Aufgaben löst und was man dabei zu tun hat. Auf die Frage „warum?“ gibt es hier wenig Antworten. Dazu sollte man dann den Text 16001 studieren. Dort steht das alles auf etwas höherem Niveau, mit Hintergrundwissen.

Weitere Texte:

16016 Keine Ahnung von Trigonometrie 2: Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke

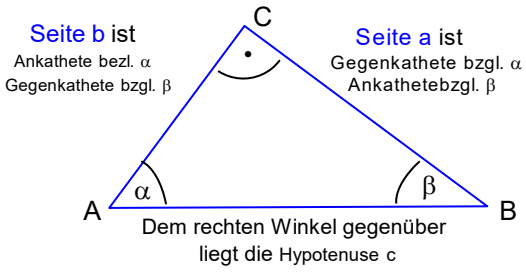
16017 Keine Ahnung von Trigonometrie 3: Unregelmäßige und nicht rechtwinklige Dreiecke

Inhalt:

1	Winkel und Seiten im rechtwinkligen Dreieck	3
	Winkel-Fakten zum Lernen Seiten-Fakten zum Lernen	
2	Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck	4
3	Die Seitenverhältnisse Sinus, Kosinus und Tangens.	5
4	Berechnung von Winkeln mit Sinus, Kosinus, Tangens.	7
	Übungsaufgaben 1, 2 und 3	8
5	Wichtige Werte zum Auswendiglernen	9
6.	Berechnen von Seiten ohne Pythagoras	10
	Genaues Taschenrechner-Ergebnis mit „Ans“	11
	Übungsaufgaben 4 und 5.	12
7	Lösung der Übungsaufgaben	13

1. Winkel und Seiten im rechtwinkligen Dreieck

Abb. 1



Winkel-Fakten zum Lernen

1. Ein rechter Winkel hat 90°.
2. Die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt 180°.
3. Wenn γ der rechte Winkel ist, dann gilt: $\alpha + \beta = 90^{O}$.
4. In einem rechtwinkligen Dreieck gibt es also keine stumpfen Winkel.

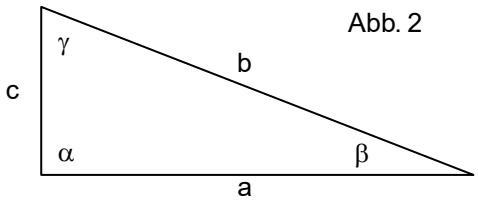
Seiten-Fakten zum Lernen

5. In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt **Hypotenuse**. Die beiden anderen Seiten nennt man **Katheten.**
6. In Abbildung 1 erkennt man, dass die beiden Schenkel von α **Ankathete** und **Hypotenuse** heißen. Die Gegenseite von α nennt man **Gegenkathete**.

   Also hat α die Ankathete b und die Gegenkathete a.

   Analog hat β die Ankathete a und die Gegenkathete b.

Abb. 2



7. In Abbildung 2 ist α der rechte Winkel, und b ist daher die Hypotenuse.

   Also hat γ die Ankathete c und die Gegenkathete a.

   Analog hat β die Ankathete a und die Gegenkathete c.

8. Im rechtwinkligen Dreieck gilt der **Satz des Pythagoras**. Je nach Lage der Seiten heißt seine Formel anders.

   In Abbildung 1 lautet er: $a^2 + b^2 = c^2$

   In Abbildung 2 lautet er: $a^2 + c^2 = b^2$

   Die wörtliche Formulierung passt auf jedes rechtwinklige Dreieck:

   Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich groß wie das Hypotenusenquadrat.

2. Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

Grundwissen über Streckungen:

Streckt man ein Dreieck von A aus, dann bleiben alle Winkel immer gleich groß. Es ändern sich jedoch die Seitenlängen, aber ihre **Verhältnisse blieben immer gleich**,

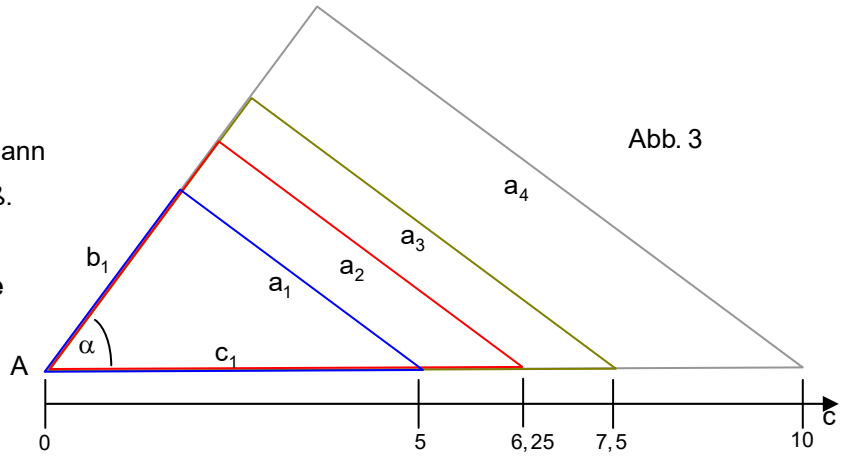


Abbildung 3 zeigt vier rechtwinklige Dreiecke, alle mit $\gamma = 90^{\circ}$ und gleichen Winkeln.

Das erste Dreieck hat $a_1 = 4$ cm, $b_1 = 3$ cm und $c_1 = 5$ cm.

Daraus ergeben sich diese drei Seitenverhältnisse: $\frac{a_1}{c_1} = \frac{4}{5}$, $\frac{b_1}{c_1} = \frac{3}{5}$ und $\frac{a_1}{b_1} = \frac{4}{3}$

Der Winkel α hat dabei automatisch die Größe $\alpha = 53{,}13^{\circ}$.

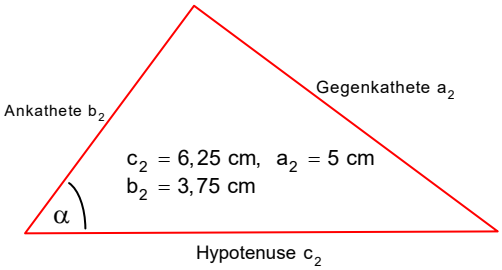
Dann wurde das Dreieck so gestreckt, dass die Seite $c_2 = 6{,}25$ cm lang wird. a_2 wird parallel zu a_1.

Für das neue Dreieck gelten genau dieselben Seitenverhältnisse:

$\frac{a_2}{c_2} = \frac{5 \cdot 4}{6{,}25 \cdot 4} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ (erweitert mit 4, gekürzt durch 5).

$\frac{b_2}{c_2} = \frac{3{,}75 \cdot 4}{6{,}25 \cdot 4} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ und $\frac{a_2}{b_2} = \frac{5 \cdot 4}{3{,}75 \cdot 4} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$

So sieht das Dreieck aus:

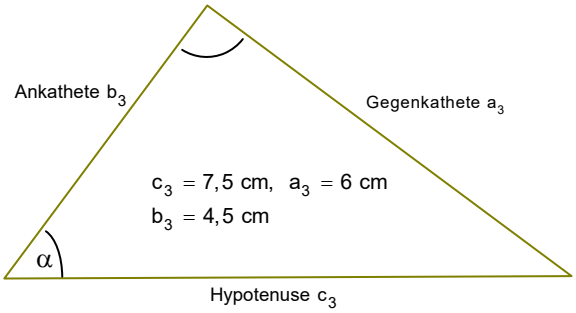


Das gilt auch, wenn man weiter streckt, so dass nun

$c_3 = 7{,}5$ cm lang wird: $\frac{a_3}{c_3} = \frac{6 \cdot 2}{7{,}5 \cdot 2} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$,

$\frac{b_3}{c_3} = \frac{4{,}5 \cdot 2}{7{,}5 \cdot 2} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ und $\frac{a_3}{b_3} = \frac{6 : 1{,}5}{4{,}5 : 1{,}5} = \frac{4}{3}$.

Und so kann man beliebig weitermachen.



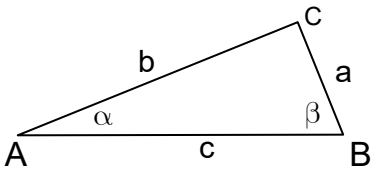
Merke dir:

Die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck hängen nicht von der Länge der Seiten ab, sondern nur von den Winkeln.
Zu jedem bestimmten Winkel gehören eindeutig bestimmte Seitenverhältnisse.

Das ist unglaublich praktisch, weil man dann ausrechnen kann, wie lang bestimmte Seiten sind oder auch wie groß die Winkel sind. Das lernen wir alles gleich. Doch zuvor erfahren wir, dass man diese drei Seitenverhältnissen bestimmte Namen gegeben hat, die das Arbeiten deutlich erleichtern.

3. Die Seitenverhältnisse Sinus, Kosinus und Tangens

Die Abbildung zeigt ein rechtwinkliges Dreieck, das seinen rechten Winkel bei C hat: $\gamma = 90^{O}$.



MERKE:

Das Seitenverhältnis „Gegenkathete durch Hypotenuse“ nennt man den **Sinus** Winkels.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Das Seitenverhältnis „Ankathete durch Hypotenuse“ nennt man den **Kosinus** des Winkels.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Das Seitenverhältnis „Gegenkathete durch Ankathete“ nennt man den **Tangens** des Winkels.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Ausführlich: Für den Winkel α ist a die Gegenkathete und b die Ankathete. Also gilt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

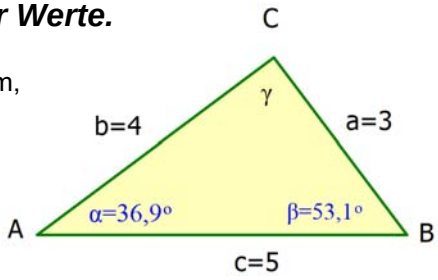
Für den Winkel β ist b die Gegenkathete und a die Ankathete. Also gilt:

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{c}, \quad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

Übungen zur Bestimmung solcher Werte.

(1) Zeichnet man das Dreieck mit c = 5 cm, a = 3 cm und b = 4 cm, erhält man einen Winkel α, den man mit einem Geodreieck ausmessen kann: $\alpha \approx 36{,}9^{O}$.

Dann kann man β berechnen: $\beta = 90^{O} - \alpha \approx 53{,}1^{O}$



Mit diesen Formeln berechne ich die trigonometrischen Werte von α:

$$\sin 36{,}9^{O} = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \cos 36{,}9^{O} = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \tan 36{,}9^{O} = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Unsere Taschenrechner können diese Werte genauer anzeigen:

```
sin 36.9
          0.6004202253
cos 36.9
          0.7996846585
tan 36.9
          0.750821238
```

Diese Werte sind genauer als unsere selbst berechneten.

Warum? Weil ich den Winkel α <u>gemessen</u> habe.

Und das Messergebnis ist etwas ungenau.

Wir werden gleich lernen, wie man die wahre Winkelgröße berechnen kann.

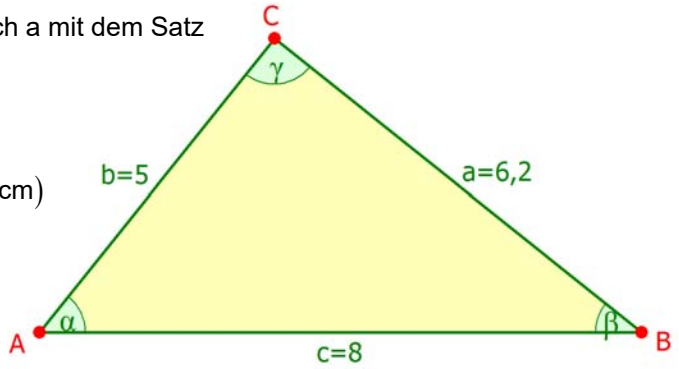
(2) Als nächstes zeichne ich das Dreieck mit c = 8 cm und b = 5 cm.
Damit es rechtwinklig wird, berechne ich a mit dem Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = c^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39} \approx 6{,}2\,(\text{cm})$$

Durch Messung erhält man

$$\alpha \approx 51{,}3^{\circ}.$$



Nun können wir die trigonometrischen Werte von α berechnen:

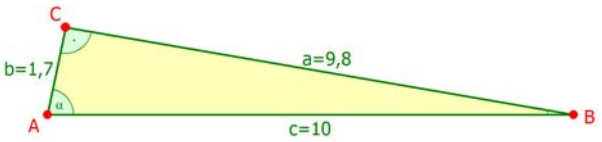
$$\sin 51{,}3^{\circ} = \frac{a}{c} = \frac{6{,}2}{8} = 0{,}775 \qquad \cos 51{,}3^{\circ} = \frac{b}{c} = \frac{5}{8} = 0{,}625 \qquad \tan 51{,}3^{\circ} = \frac{a}{b} = \frac{6{,}2}{5} = 1{,}24$$

Unsere Taschenrechner können diese Werte genauer anzeigen:

```
sin 51.3
                0.7804304073
cos 51.3
                0.6252426563
tan 51.3
                1.248204036
```

(3) Noch ein rechtwinkliges Dreieck
mit c = 10 cm und b = 1,7 cm und berechne

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{100 - 2{,}89} = 9{,}85\,(\text{cm})$$



Ich habe die Abbildung verkleinert,
kann aber dennoch die Winkelgröße ausmessen, weil sich die Winkel bei einer Streckung oder Stauchung nicht ändern: Die Dreiecksform bleibt gleich.

Ich erhalte: $\alpha \approx 80{,}2^{\circ}$. Berechnung der trigonometrischen Winkelwerte:

$$\sin 80{,}2^{\circ} = \frac{a}{c} = \frac{9{,}8}{10} = 0{,}98 \qquad \cos 80{,}2^{\circ} = \frac{b}{c} = \frac{1{,}7}{10} = 0{,}17 \qquad \tan 80{,}2^{\circ} = \frac{a}{b} = \frac{9{,}8}{1{,}7} = 5{,}79$$

Rechts sieht man, was mein Taschenrechner berechnet hat.
Es ist ein CASIO fx-CG 50.

Man erkennt in der unteren Mitte rechts drei schwarze Tasten mit weißen Aufschriften.

Damit berechnet man Sinuswerte, Kosinuswerte und Tangenswerte

Zuerst drückt man eine dieser Tasten, danach gibt man die Winkelgröße ein.

Schüler fragen gerne: „Wozu braucht man das?“

Die Aufgabenstellung in der Trigonometrie ist die Dreiecksberechnung.
In den letzten drei Beispielen habe ich die Winkel mit einem Geodreieck gemessen (sage ich jetzt mal so…).

Ich zeige im nächsten Abschnitt, wie man diese Winkel berechnen kann.

4. Berechnung von Winkeln mit Sinus, Kosinus, Tangens

Gegeben seien zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Zum Beispiel c = 8 cm und b = 5 cm. Du solltest nun schon gelernt haben, dass man das Seitenverhältnis aus b und c als **Kosinus** von α bezeichnet. Also haben wir auf der vorigen Seite berechnet: $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

Aus der Gleichung $\boxed{\cos\alpha = 0{,}625}$ kann ein Taschenrechner die Größe von α berechnen!

Dazu hat man diese Schreibweise eingeführt: $\boxed{\alpha = \cos^{-1} 0{,}625}$

Das gibt man so in den Rechner ein:

SHIFT cos 0.625 EXE

Den Ausdruck $\cos^{-1}$ findet man klein gedruckt über der cos-Taste. Damit dies nun auch aktiviert wird, muss man zuvor die Taste SHIFT drücken, gefolgt von der cos-Taste.

```
cos⁻¹ 0.625
          51.31781255
```

Die Werte von sin, cos und tan sind meistens unendlich lange Dezimalzahlen, so dass man runden muss. Auch das Ergebnis für den Winkel wird gerundet auf 51,32°.

Kurzlösung (mit $\cos^{-1}$): (Denn gegeben sind Ankathete und Hypotenuse)

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit c = 8 cm und b = 5 cm.

Ausführlich: $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{5}{8} = 0{,}625$, also folgt: $\alpha = \cos^{-1} 0{,}625 \approx 51{,}32^{\circ}$

Kurzmethode: $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx 51{,}32^{\circ}$

```
cos⁻¹ 5/8
          51.317
```

Den zweiten Winkel β erhält man immer über die Winkelsumme: $\boxed{\beta = 90^{\circ} - \alpha \approx 38{,}68^{\circ}}$

Nächstes Beispiel (mit $\sin^{-1}$): (Denn gegeben sind Gegenkathete und Hypotenuse)

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit c = 9 cm und a = 2 cm

Ausführlich: $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2}{9}$, also folgt $\alpha \approx 12{,}84^{\circ}$.

Kurzmethode: $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) \approx 12{,}84^{\circ}$

```
sin⁻¹ 2/9
          12.839
```

Nächstes Beispiel (mit $\tan^{-1}$): (Denn gegeben sind Ankathete und Gegenkathete)

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit a =4 cm und b = 7 cm

Ausführlich: $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{4}{7}$, also folgt $\alpha \approx 29{,}744^{\circ}$

Kurzmethode: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 29{,}74^{\circ}$

```
tan⁻¹ 4/7
          29.744
```

Übungsaufgaben

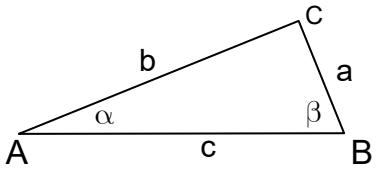
Berechne die beiden nicht-rechten Winkel und die nicht bekannte 3. Seite (mittels Pythagoras) zu folgenden rechtwinkligen Dreiecken. Runde auf 1 Dezimale.

1. a) c = 6 cm, a = 3 cm

   b) c = 12 cm, b = 5 cm

   c) a = 6 cm, b = 6 cm

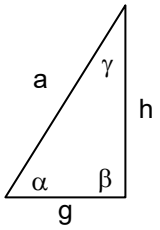
   d) a = 4 cm, b = 12 cm



2. a) g = 2 m, h = 3 m

   b) g = 80 cm, a = 2 m

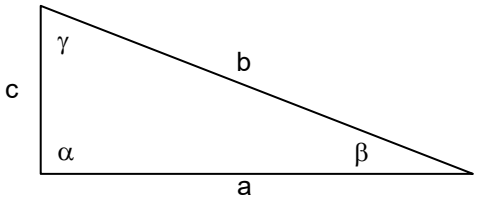
   c) a = 8 cm, h = 5 cm



3. a) a = 20 cm, b = 25 cm

   b) a = 45 cm, c = 12 cm

   c) c = 4,2 cm, b = 11,5 cm



Die Lösungen stehen am Ende des Textes

5. Wichtige Werte zum Auswendiglernen

Es gibt einige Werte, die sollte ein guter Schüler auswendig wissen, denn man benötigt sie oft.
Für Interessierte: Die Berechnung dieser Werte findet man im Text 16001 auf den Seiten 12 bis 15.

Grad-maß	Sinus	Kosinus	Tangens
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	Kein Wert (∞)

Wichtig:

Für die Sinuswerte gibt es eine Merkregel:

$$\sin 0^{O} = \boxed{\tfrac{1}{2}\sqrt{0}} = 0\,,$$

$$\sin 30^{O} = \boxed{\tfrac{1}{2}\sqrt{1}} = \tfrac{1}{2}$$

$$\sin 45^{O} = \boxed{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$\sin 60^{O} = \boxed{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$\sin 90^{O} = \boxed{\tfrac{1}{2}\sqrt{4}} = 1$$

Weil im rechtwinkligen Dreieck gilt $\alpha + \beta = 90^{O}$ folgt $\beta = 90^{o} - \alpha$. Daher gibt es die Beziehung:

$$\cos\alpha = \sin\left(90^{O} - \alpha\right)$$

z. B:

$$\boxed{\cos 30^{O} = \sin 60^{O}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\boxed{\cos 45^{O} = \sin 45^{O}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}707$$

$$\boxed{\cos 60^{O} = \sin 30^{O}} = \tfrac{1}{2}$$

Außerdem ist

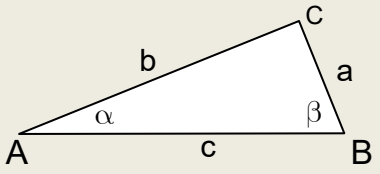
$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

6. Berechnung von Seiten ohne Pythagoras

Für das rechts abgebildete Dreieck kennst du bereits:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ und $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

$\sin\beta = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$ und $\tan\beta = \frac{b}{a}$



Jede dieser 6 Gleichungen enthält drei Größen dieses Dreiecks. ALSO:

Wenn man zwei dieser drei Größen kennt, kann man aus der passenden Gleichung die dritte berechnen.

Nun musst du nur noch üben.

Beispiel 1: Ein rechtwinkliges Dreieck (siehe Abb.) hat die Seite c = 8,5 cm und den Winkel $\alpha = 60^{\circ}$. Berechne a, b und β.

Du musst erkennen, dass zu c und α der Sinus passt: $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \boxed{a = c \cdot \sin\alpha}$

Mit Zahlen: $a = 8{,}5\text{ cm} \cdot \sin 60^{0} \approx 7{,}36\text{ cm}$

Zur Berechnung von b verwendet man den Kosinus: $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{b = c \cdot \cos\beta}$

Mit Zahlen: $b = 8{,}5\text{ cm} \cdot \cos 60^{\circ} = 4{,}25\text{ cm}$

Den 2. Winkel berechnet man über die Winkelsumme: $\beta = 90^{\circ} - \alpha = 90^{\circ} - 60^{\circ} = 30^{\circ}$

Und so hat es mein Taschenrechner gemacht:

```
8.5×sin 60
          7.361215932
8.5×cos 60
                 4.25
90-60
                   30
```

Beispiel 2: Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Seite c = 24 cm und den Winkel $\beta = 42^{\circ}$. Berechne a, b und α.

Zu c und β passt für a der Kosinus: $\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow \boxed{a = c \cdot \cos\alpha}$

Mit Zahlen: $a = 24\text{ cm} \cdot \cos 42^{0} \approx 17{,}84\text{ cm}$

Zur Berechnung von b verwendet man den Sinus: $\sin\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{b = c \cdot \sin\beta}$

Mit Zahlen: $b = 24\text{ cm} \cdot \sin 42^{\circ} = 16{,}06\text{ cm}$

Schließlich über die Winkelsumme: $\alpha = 90^{\circ} - \beta = 90^{\circ} - 42^{\circ} = 48^{\circ}$

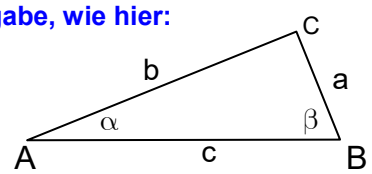
Und so hat es mein Taschenrechner gemacht:

```
24×cos 42
          17.83547581
24×sin 42
          16.05913455
90-42
                   48
```

Hinweis: Ich habe die Ergebnisse auf die 2.Dezimale gerundet.

Oft gibt es mehrere Wege zur Lösung einer Aufgabe, wie hier:

Beispiel 3: Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Seite a = 8,5 cm und den Winkel $\alpha = 28{,}5^{\circ}$. Berechne c, b und β.



1. Weg:

Zu a und α passt für b der Tangens: $\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot \tan\alpha = a \Rightarrow \boxed{b = \frac{a}{\tan\alpha}}$

Mit Zahlen: $b = \frac{8{,}5\text{ cm}}{\tan 28{,}5^{\circ}} \approx 15{,}66\text{ cm}$

Berechnung von b mit Sinus: $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c \cdot \sin\alpha = a \Rightarrow \boxed{c = \frac{a}{\sin\alpha}}$

Mit Zahlen: $c = \frac{8{,}5\text{ cm}}{\sin 28{,}5^{\circ}} \approx 17{,}81\text{ cm}$

Schließlich über die Winkelsumme: $\beta = 90^{\circ} - \alpha = 90^{\circ} - 28{,}5^{\circ} = 61{,}5^{\circ}$

Und das hat mein Taschenrechner geliefert:

```
8.5÷tan 28.5
          15.65505253
8.5÷sin 28.5
          17.81377753
90-28.5
                 61.5
```

2. Weg:

Zu a und α passt für c der Sinus: $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c \cdot \sin\alpha = a \Rightarrow \boxed{c = \frac{a}{\sin\alpha}}$

Mit Zahlen: $c = \frac{8{,}5\text{ cm}}{\sin 28{,}5^{\circ}} \approx 17{,}81\text{ cm}$

Berechnung von b mit Sinus: $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{b = c \cdot \cos\alpha}$

Mit Zahlen: $b = \boxed{17{,}81\text{ cm}} \cdot \cos 28{,}5^{\circ} \approx 15{,}65\text{ cm}$

Schließlich über die Winkelsumme: $\beta = 90^{\circ} - \alpha = 90^{\circ} - 28{,}5^{\circ} = 61{,}5^{\circ}$

Ungenaue Rechnung:

```
8.5÷sin 28.5
          17.81377753
17.81×cos 28.5
          15.65173278
```

Genaue Rechnung

```
8.5÷sin 28.5
          17.81377753
Ans×cos 28.5
          15.65505253
```

Die erste Berechnung ist ungünstig, weil b mit dem soeben berechneten *Näherungswert* von c berechnet wird. Daher wird b leicht ungenau. Die zweite Rechnung ist genau, weil hier für c das letzte Ergebnis verwendet wird. Dieses ist in der Variablen „Ans“ gespeichert!

3. Weg:

Zuerst wird β berechnet: $\beta = 90^{\circ} - \alpha = 90^{\circ} - 28{,}5^{\circ} = 61{,}5^{\circ}$

Zu a und α passt der Sinus: $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c \cdot \sin\alpha = a \Rightarrow \boxed{c = \frac{a}{\sin\alpha}}$

Mit Zahlen: $c = \frac{8{,}5\text{ cm}}{\sin 28{,}5^{\circ}} \approx 17{,}81\text{ cm}$

Berechnung von b mit Sinus: $\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{b = c \cdot \sin\beta}$

Mit Zahlen: $b = \boxed{17{,}81\text{ cm}} \cdot \sin 61{,}5 \approx 15{,}65\text{ cm}$

Ungenaue Rechnung:

```
8.5÷sin 28.5
          17.81377753
17.81×sin 61.5
          15.65173278
```

Genaue Rechnung:

```
8.5÷sin 28.5
          17.81377753
Ans×sin 61.5
          15.65505253
```

Übungsaufgaben

Berechne die fehlenden Winkel und die nicht bekannten Seite (ohne Pythagoras!) zu folgenden rechtwinkligen Dreiecken:

4. a) c = 13 cm, $\alpha = 75^{O}$

   b) c = 4,0 m, $\beta = 5{,}6^{O}$

   c) c = 8,2 cm, a = 4,8 cm

   d) c = 11,5 cm, b = 4,2 cm

   e) a = 14 cm, b = 5 cm

   f) a = 4,6 cm, $\alpha = 68^{O}$

   g) a = 28 cm, $\beta = 25^{O}$

   h) b = 18 cm, $\alpha = 12{,}5^{O}$

   i) b = 120 m, $\beta = 40^{O}$

5. Warum ist diese Aufgabe nicht lösbar:

   a) $\alpha = 38^{O}$, $\beta = 42^{O}$

   b) $\alpha = 57^{O}$, $\beta = 23^{O}$

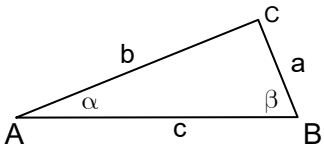
Die Lösungen stehen am Ende des Textes

7 Lösung der Übungsaufgaben

Bei vielen Aufgaben (besonders in Nr. 4) gibt es mehrere Lösungswege. Ich zeige in der Regel nur einen. Man sollte darauf achten, dass man für den zweiten Schritt auch nur gegebene Zahlen verwendet und möglichst keine, die im erste Schritt näherungsweise berechnet worden sind, weil sich dann eine Ungenauigkeit einschleicht. Ein Trick steht in der Lösung 4c.

Berechne die beiden nicht-rechten Winkel und die nicht bekannte 3. Seite (mittels Pythagoras). Runde auf 1 Dezimale.

1a) c = 6 cm, a = 3 cm



$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ}$ (lernen!)

$\beta = 90^{\circ} - \alpha = 60^{\circ}$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36-9}\,\text{cm} = \sqrt{27}\,\text{cm} \approx 5{,}2\text{ cm}$

b) c = 12 cm, b = 5 cm $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)} \approx 65{,}4^{\circ}$

$\cos^{-1}\frac{5}{12}$	65.37568165
90−Ans	24.62431835

$\beta = 90^{\circ} - \alpha \approx 24{,}6^{\circ}$ und $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{144-25}\,\text{cm} = \sqrt{119}\,\text{cm} \approx 10{,}9\text{ cm}$

c) a = 6 cm, b = 6 cm $\Rightarrow \tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{6}{6}\right) = \boxed{\tan^{-1}(1) = 45^{\circ}} \Rightarrow \beta = 45^{\circ}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36+36}\,\text{cm} = \sqrt{2\cdot 36}\text{ cm} = 6\cdot\sqrt{2}\text{ cm} \approx 8{,}5\text{ cm}$

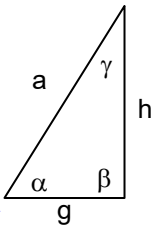
d) a = 4 cm, b = 12 cm

$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{12}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18{,}4^{\circ}} \Rightarrow \beta = 90^{\circ} - \alpha = 71{,}6^{\circ}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+144}\,\text{cm} = \sqrt{160}\text{ cm} \approx 12{,}6\text{ cm}$

$\tan^{-1}(1\div 3)$	18.43494882
$\sqrt{160}$	12.64911064

2a) g = 2 m, h = 3 m $\Rightarrow \tan\alpha = \frac{h}{g} \Rightarrow \boxed{\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56{,}3^{\circ}}$



$\beta = 90^{\circ} - \alpha = 33{,}7^{\circ}$

$a = \sqrt{g^2 + h^2} = \sqrt{13}\text{ m} \approx 3{,}6\text{ m}$

$\tan^{-1} 1.5$	56.30993247
$\sqrt{13}$	3.605551275

b) g = 80 cm, a = 2 m $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{a} \Rightarrow \boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{80}{200}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 66{,}4^{\circ}}$

$\beta = 90^{\circ} - 66{,}4^{\circ} = 23{,}6^{\circ}$

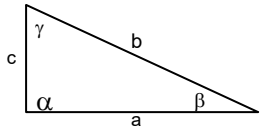
$h = \sqrt{a^2 - g^2} = \sqrt{200^2 - 80^2} \approx 183{,}3\text{ cm}$

$\cos^{-1}\frac{2}{5}$	66.42182152
$\sqrt{200^2-80^2}$	183.3030278

c) a = 8 cm, h = 5 cm $\Rightarrow \sin\alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow \boxed{\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx 38{,}7^{\circ}}$

$\sin^{-1}\frac{5}{8}$	38.68218745
$\sqrt{39}$	6.244997998

$\beta = 90^{\circ} - 38{,}7^{\circ} = 51{,}3^{\circ}$ und $g = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{39}\,\text{cm} \approx 6{,}2\text{ cm}$



3.a) a = 20 cm, b = 25 cm $\Rightarrow \sin\gamma = \frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{20}{25}\right) \approx 53{,}1^{\circ}}$

$\beta = 90^{\circ} - \gamma = 90^{\circ} - 53{,}1^{\circ} = 36{,}9^{\circ}$

$c^2 + a^2 = b^2 \Rightarrow c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25^2 - 20^2}\ \text{cm} = 15\ \text{cm}$

$\sin^{-1}\frac{20}{25}$ 53.130

b) a = 45 cm, c = 12 cm $\Rightarrow \tan\gamma = \frac{a}{c} \Rightarrow \boxed{\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{12}{45}\right) \approx 14{,}9^{\circ}}$

$\beta = 90^{\circ} - \gamma = 90^{\circ} - 14{,}9^{\circ} = 75{,}1^{\circ}$

$c^2 + a^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{45^2 + 12^2}\ \text{cm} \approx 46{,}6\ \text{cm}$

$\tan^{-1}\frac{12}{45}$ 14.931

$\sqrt{45^2+12^2}$ 46.572

c) c = 4,2 cm, b = 11,5 cm

$\cos\gamma = \frac{c}{b} \Rightarrow \boxed{\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{4{,}2}{11{,}5}\right) \approx 68{,}6^{\circ}} \Rightarrow \beta = 90^{\circ} - \gamma = 21{,}4^{\circ}$

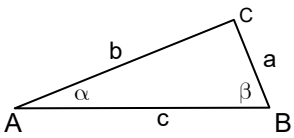
$c^2 + a^2 = b^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{11{,}5^2 - 4{,}2^2}\ \text{cm} \approx 10{,}7\ \text{cm}$

$\cos^{-1}\frac{4.2}{11.5}$ 68.579

$\sqrt{11.5^2-4.2^2}$ 10.705

Berechne die fehlenden Winkel und die nicht bekannten Seite (ohne Pythagoras!) zu folgenden rechtwinkligen Dreiecken:

Tipp: Verwende nach Möglichkeit für die Rechnungen nur die gegebenen Zahlen, also keine schon berechneten Ergebnisse. Diese sind meistens gerundet, sodass nachfolgende Ergebnisse ungenauer werden. Da die „Spielregel“ hier heißt: Keinen Pythagoras verwenden (denn wir wollen ja Trigonometrie üben), muss man, wenn 2 Seiten gegeben sind zuerst einen Winkel berechnen und dann mit dessen Wert weiterrechnen. Ich zeige im Screenshot zu 4c, wie man mit dem nicht gerundeten Wert weiterrechnen kann, indem man den Befehl „Ans“ (=letztes Ergebnis) verwendet.



4a) c = 13 cm, $\alpha = 75^{\circ} \Rightarrow \beta = 90^{\circ} - \alpha = 15^{\circ}$

$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin\alpha} = 13\ \text{cm} \cdot \sin 75^{\circ} \approx 12{,}6\ \text{cm}$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\alpha} = 13\ \text{cm} \cdot \cos 75^{\circ} \approx 3{,}4\ \text{cm}$

13×sin 75 12.55703574

13×cos 75 3.364647586

b) c = 4,0 m, $\beta = 5{,}6^{\circ} \Rightarrow \alpha = 90^{\circ} - \beta = 84{,}4^{\circ}$

$\boxed{\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \sin\beta} = 4\ \text{cm} \cdot \sin 5{,}6^{\circ} \approx 0{,}4\ \text{cm}$

$\boxed{\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos\beta} = 4\ \text{cm} \cdot \cos 5{,}6^{\circ} \approx 3{,}98\ \text{cm}$

4×sin 5.6 0.390331599

4×cos 5.6 3.9809096

Hier sollte man a nicht auf 4,0 cm, aufrunden, denn a und c können ja nicht gleich lang sein!

c) c = 8,2 cm, a = 4,8 cm

$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)} = \sin^{-1}\left(\frac{4{,}8}{8{,}2}\right) \approx 35{,}8^{\circ}$ und $\beta = 90^{\circ} - \alpha \approx 54{,}2^{\circ}$.

$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\alpha} \approx 8{,}2\text{ cm} \cdot \cos 36{,}8^{\circ} \approx 6{,}6\text{ cm}$

```
sin⁻¹ 4.8/8.2
                35.8288401
8.2×cos Ans
                6.648308055
```

Hier habe ich für α nicht den gerundeten Wert 35,8° verwendet,

sondern das letzte (genaue) Ergebnis, indem ich den Befehl „Ans“ verwendet habe.

d) c = 11,5 cm, b = 4,2 cm. *Drei Wege führen zu Ziel:*

Ich könnte a mittels Pythagoras berechnen. Und dann die Winkel α und β.

Oder ich könnte $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \ldots$ ausrechnen, dann a mittels $\sin\alpha$.

Oder $\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) \approx \ldots.$ ausrechnen und dann a mittels $\cos\beta$ usw.

$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)} \approx 68{,}6^{\circ} \Rightarrow \beta = 90^{\circ} - \alpha = 21{,}4^{\circ}$

$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin\alpha} \approx 11{,}5\text{ cm} \cdot \sin 68{,}6^{\circ} \approx 10{,}7\text{ cm}$

```
cos⁻¹ 4.2/11.5
                68.57903805
11.5×sin Ans
                10.70560601
```

e) a = 14 cm, b = 5 cm *Hinweise siehe 4d*

$\boxed{\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{14}{5}\right)} = \tan^{-1}(2{,}8) \approx 70{,}3^{\circ} \Rightarrow \beta = 90^{\circ} - \alpha \approx 19{,}7^{\circ}$

$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c \cdot \sin\alpha = a \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha}} \approx 14{,}9\text{ cm}$

```
tan⁻¹ 2.8
                70.34617594
14/sin Ans
                14.86606875
```

f) a = 4,6 cm, $\alpha = 68^{\circ}$ $\beta = 90^{\circ} - \alpha = 22^{\circ}$

$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c \cdot \sin\alpha = a \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha}} \approx 5{,}0$

$\boxed{\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot \tan\alpha = a \Rightarrow b = \frac{a}{\tan\alpha}} \approx 1{,}9\text{ cm}$

```
4.6/sin 68
                4.961259816
4.6/tan 68
                1.858520639
```

Würde man b mit $\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\alpha$ *berechnen, müsste man den gerundeten Wert von c verwenden oder mit „Ans“ arbeiten.*

g) a = 28 cm, $\beta = 25^{\circ}$ $\alpha = 90^{\circ} - \beta = 65^{\circ}$

$\boxed{\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow c \cdot \cos\beta = a \Rightarrow c = \frac{a}{\cos\beta}} \approx 30{,}9\text{ cm}$

$\boxed{\tan\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \tan\beta} \approx 13{,}1\text{ cm}$

```
28/cos 25
                30.89458173
28×tan 25
                13.05661443
```

h) b = 18 cm, $\alpha = 12{,}5^{\circ}$ $\beta = 90^{\circ} - \alpha = 77{,}5^{\circ}$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow c \cdot \cos\alpha = b \Rightarrow c = \frac{b}{\cos\alpha}} \approx 18{,}4\text{ cm}$

$\boxed{\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \tan\alpha} \approx 4{,}0\text{ cm}$

```
18/cos 12.5
                18.43703126
18×tan 12.5
                3.990503928
```

i) b = 120 m, $\beta = 40^{O}$ $\alpha = 90^{O} - \beta = 50^{O}$

$$\boxed{\sin\beta = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad c \cdot \sin\beta = b \quad \Rightarrow \quad c = \frac{b}{\sin\beta}} \approx 186{,}7 \text{ m}$$

$$\boxed{\tan\beta = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad a \cdot \tan\beta = b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b}{\tan\beta}} \approx 143{,}0 \text{ m}$$

```
 120
sin 40
              186.6868592
 120
tan 40
              143.0104311
```

5. Warum ist diese Aufgabe nicht lösbar:

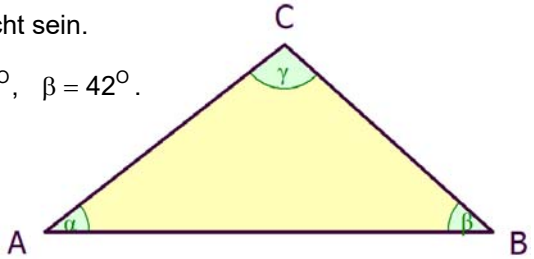
a) $\alpha = 38^{O}$, $\beta = 42^{O}$

Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck außer dem rechten Winkel noch ein weiterer Winkel bekannt ist, z. B. $\alpha = 38^{O}$, dann kann man dazu $\beta = 90^{O} - \alpha = 52^{O}$ berechnen.

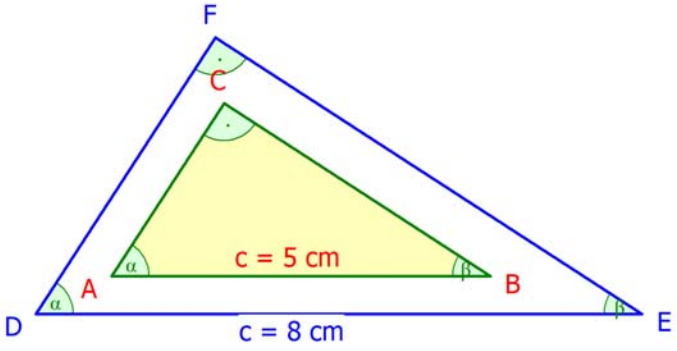
Hier ist aber $\beta = 42^{O}$ gegeben. Dies kann also nicht sein.

Es gibt also kein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 38^{O}$, $\beta = 42^{O}$.

Der Winkel γ hat 120°, egal wie lang c ist …..



b) $\alpha = 57^{O}$, $\beta = 33^{O}$

Weil hier $\alpha + \beta = 90^{O}$ ist, gibt es solche Dreiecke. Aber da man β aus α berechnen kann, ist im Grunde nur ein Winkel gegeben. Man benötigt eine weitere Seite, denn so gibt es unendlich viele passende Dreiecke mit $\alpha = 57^{O}$, $\beta = 33^{O}$.

Die Abbildung zeigt zwei solche Dreiecke.
Beide haben dieselben Winkel.